

9–10 КЛАССЫ

1. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом 20° при вершине A ($AB = AC$). На стороне AB выбрана точка D так, что $\angle BDC = 50^\circ$, а на стороне AC выбрана точка E так, что $\angle CBE = 60^\circ$. Найдите угол DEB .

Решение. Отметим на стороне AC точку F так, чтобы $\angle CBF = 20^\circ$. Тогда треугольник BDF равносторонний, а треугольник DFE равнобедренный с углом равным 40° при вершине F . Тогда $100^\circ - \angle DEB = 40^\circ + \angle DEB$, откуда $\angle DEB = 30^\circ$.

2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2([z]^2 + 1)(\{z\}^2 + 1) \\ y^2 + z^2 = 2([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1), \\ x^2 + z^2 = 2([y]^2 + 1)(\{y\}^2 + 1) \end{cases}$$

где $[w]$ обозначает целую часть действительного числа w , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее w , $\{w\} = w - [w]$ — дробная часть числа w .

Решение. Сложим все уравнения, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) + ([y]^2 + 1)(\{y\}^2 + 1) + ([z]^2 + 1)(\{z\}^2 + 1). \quad (1)$$

Дальше заметим, что неравенство $a^2 \leq ([a]^2 + 1)(\{a\}^2 + 1)$ справедливо всегда и обращается в равенство только если $[a] \cdot \{a\} = 1$. Действительно, пусть $[a] = n$, $\{a\} = t$, тогда $a = n + t$ и получаем неравенство $(n + t)^2 \leq (n^2 + 1)(t^2 + 1)$ которое равносильно неравенству $(nt - 1)^2 \geq 0$. Следовательно, равенство (1) возможно только в случае, когда $[x] \cdot \{x\} = 1$, $[y] \cdot \{y\} = 1$ и $[z] \cdot \{z\} = 1$. Поскольку дробная часть всегда неотрицательна, отсюда следует, что x, y и z положительны.

Итак, $x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1)$, $y^2 = ([y]^2 + 1)(\{y\}^2 + 1)$, $z^2 = ([z]^2 + 1)(\{z\}^2 + 1)$. Подставим в систему, получим, что $x^2 + y^2 = 2z^2$, $y^2 + z^2 = 2x^2$, $x^2 + z^2 = 2y^2$. Отсюда $x^2 = y^2 = z^2$, а поскольку они положительны, то $x = y = z$.

Ответ: все тройки вида (a, a, a) , где $a > 0$ и $[a] \cdot \{a\} = 1$ (т. е. $a = n\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$).

3. Трансгалактический глассер движется прямолинейно с постоянной скоростью, проходя 1 световую миллсекунду за 1 секунду. В какой-то момент он начинает совершать поворот по дуге окружности, не изменяя модуля скорости. Какой угол будет составлять скорость движения глассера с первоначальным направлением движения через 10 минут, если движение совершалось с перегрузкой $4g$? Считайте $g = 10$ м/с, скорость света $3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. $4g = v^2/R$, $R = \frac{v^2}{4g} = \frac{(3 \cdot 10^5)^2}{40} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{40}$, $R = 2,25 \cdot 10^9$ м, $\varphi = \frac{S}{R} = \frac{vt_0}{R} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 600}{2,25 \cdot 10^9} = 0,08$ радиана.

Ответ: 0,08 радиана.

4. Дано N отрезков провода длиной L_1, L_2, \dots, L_N сантиметров. Требуется с помощью разрезания получить из них K равных отрезков как можно большей длины, выражающейся целым числом сантиметров. Напишите программу на вашем любимом языке программирования, которая решает данную задачу.

Ограничения: $1 \leq N \leq 10000$, $1 \leq K \leq 10000$, $100 \leq L_i \leq 10000000$, все числа целые.

Входные данные

В первой строке находятся числа N и K . В следующих N строках — L_1, L_2, \dots, L_N , по одному числу в строке.

Выходные данные

Вывести одно число — полученную длину отрезков. Если нельзя получить K отрезков длиной даже 1 см, вывести 0.

Пример:

ВВОД

4 11

802

743

457

539

ВЫВОД

200

Решение

```

n, k = map(int, input().split())
mass = [int(input()) for _ in range(n)]
l, r = 1, max(mass)
i = 0
while l <= r:
    mid = (l + r) // 2
    t = sum(j // mid for j in mass)
    if t >= k:
        i = mid
        l = mid + 1
    else:
        r = mid - 1
print(i)

```

5. В Солнечной системе наступило соединение Меркурия с Солнцем для Венеры (т. е. наблюдатель, находящийся на Венере, увидел Меркурий и Солнце в одной точке). Оказалось, что в этот момент расстояние между этими планетами было равно расстоянию от Марса до Земли, причем угол между Венерой и Землей для Солнца составил 90° (т. е. отрезки Солнце–Венера и Солнце–Земля перпендикулярны). Какие угловые размеры при наблюдении с Марса имели Венера и Меркурий? Расстояния от Солнца до: Меркурия — 0.42 а.е., Венеры — 0.72 а.е., Земли — 1 а.е., Марса — 1.52 а.е. Радиус Меркурия считайте равным 2400 км, радиус Венеры 6052 км. Ответ запишите в угловых секундах.

Решение. Все планеты Солнечной системы вращаются в одной плоскости (отклонения от плоскости пренебрегаем). Возможны две ситуации. Пусть Меркурий Me оказался между Солнцем S и Венерой V . Тогда $VMe = VS - MeS = 0.3$ (все расстояния будут в а.е.). Минимальное возможно расстояние между Землей G и Марсом M равно 0.52, так что данный вариант отпадает. Значит, Меркурий оказался за Солнцем относительно Венеры, т.е. $VMe = 1.14$. В треугольнике SGM известны все стороны: $SG = 1$, $SM = 1.52$, $GM = 1.14$ — можем найти косинус угла GSM :

$$\cos \alpha = \frac{GS^2 + MS^2 - GM^2}{2GS \cdot MS} = 0.66.$$

Здесь тоже возможны две ситуации: $\angle MSV = \pi/2 \pm \alpha$. Пусть сначала $\angle MSV = \pi/2 - \alpha$. Тогда из треугольника MSV находим $MV \approx 1,1$, из треугольника $MSMe$ находим $MMe \approx 1,86$. Если же $\angle MSV = \pi/2 + \alpha$, то $MV \approx 2,02$, $MMe \approx 1,22$. Угловые размеры находим по формуле $\gamma \approx \frac{R}{\rho}$, где R — радиус планеты, ρ — расстояние от нее до Марса. Получаем в первом случае $\gamma_V \approx 15,1''$, $\gamma_{Me} \approx 3,5''$; во втором случае $\gamma_V \approx 8,2''$, $\gamma_{Me} \approx 5,4''$.

Ответ: $\gamma_V \approx 15,1''$, $\gamma_{Me} \approx 3,5''$ или $\gamma_V \approx 8,2''$, $\gamma_{Me} \approx 5,4''$.

6. Вы знаете, что на геостационарной орбите находится очень много спутников. Однако спутники на селеностационарную орбиту (круговую орбиту в экваториальной плоскости Луны, находясь на которой,

спутник будет иметь постоянную проекцию на поверхность Луны) до сих пор не выведены.

а) Рассчитайте радиус такой орбиты.

б) Как будет двигаться спутник, который вывели на такую орбиту?

в) Какие орбиты для наблюдения за лунной поверхностью лучше использовать?

Масса Луны $M = 7,348 \cdot 10^{22}$ кг (в 81,3 раза меньше массы Земли), радиус Луны $R = 1737,5$ км, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг. Расстояние от Земли до Луны 384000 км.

Решение пункта а). По определению селеностационарной орбиты, спутник должен иметь период обращения T , равный времени одного полного оборота Луны вокруг своей оси. Известно, что Луна обращена к Земле одной и той же своей стороной, т.е. этот период совпадает со временем полного оборота Луны вокруг Земли (сидерический месяц, равный 27,3 суток). Таким образом, $T = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$ с. Выразим T через радиус орбиты r и массу Луны M : закон Ньютона дает $F = ma$, $F = G \frac{Mm}{r^2}$, $a = \omega^2 r$, $2\pi\omega = T$, откуда $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$. Отсюда находим радиус орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 88 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Решение пункта б). Найдем точки гравитационного равновесия в системе Земля–Луна: $F_3 = F_Л$. Для точки, лежащей на отрезке с концами в центрах шаров, получим $\frac{M_3}{R_1^2} = \frac{M_Л}{R_2^2}$, $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{81,3} \approx 9$. Поскольку $R_1 + R_2 = R = 384 \cdot 10^3$ км, то $R_2 = 38,4 \cdot 10^3$ км. Таким образом, спутник на селеностационарной орбите будет испытывать силу притяжения Земли, большую, чем силу притяжения Луны. Значит, гравитационная модель двух тел к задаче не применима и надо использовать модель трех тел (Земля–Луна–спутник). В этой модели для определения зоны устойчивого движения вокруг меньшего тела (Луны) используется сфера Хилла. Радиус сферы Хилла

$$R_H = R \cdot \sqrt[3]{\frac{M_Л}{3M_3}} = 61,5 \cdot 10^3 \text{ км}$$

дает верхнюю границу для зоны устойчивого движения вокруг Луны (реальная зона устойчивого движения ограничена величиной 0,33–0,5 радиуса сферы, т.е. от 20 до 30 тысяч километров от центра Луны). Таким образом, спутник, выведенный на селеностационарную орбиту, будет «в основном» двигаться по орбите Земли. Начальное влияние Луны следует воспринимать, скорее как гравитационный маневр, сделанный спутником. Конкретное поведение спутника под действием такого маневра зависит от точки орбиты, на которую мы вывели спутник после окончания вывода. Например, если точка вывода находится за Луной на луче, проходящем через центры Земли и Луны, то воздействие Луны на спутник сводится, в основном к ускорению по направлению движения. В результате спутник выйдет на сильно вытянутую эллиптическую орбиту Земли. Двигаясь по ней он «отстанет» от Луны (когда Луна совершит полный оборот, спутник не пройдет и половины своей орбиты). Второй пример — точка вывода лежит на отрезке Земля–Луна. Тогда спутник выйдет на орбиту Земли, лежащую наоборот ближе к Земле, чем орбита Луны. На этой орбите спутник обгонит Луну (когда спутник совершит полный оборот, луна не пройдет и половины своей орбиты). В любом случае, такой спутник не годится для наблюдения за поверхностью Луны.

Решение пункта в). Лучше всего использовать точки Лагранжа. При этом, точки L_1 , L_2 и L_3 (коллинеарные) неустойчивы, так что неподвижный спутник в таких точках требует постоянной коррекции или «живет в них» недолго. Несмотря на это, эти точки (а именно, L_1 и L_2) сейчас активно используются для размещения аппаратов: при правильно подобранных начальном положении и скорости спутника его орбита в окрестности L_1 и L_2 становится стационарной (для задачи трех тел) или почти стационарной (с учетом притяжения Солнца). Точки L_4 и L_5 устойчивы, но находятся далеко от поверхности Луны (расстояние такое же, как от Земли до Луны) и, таким образом, не несут никакой выгоды по сравнению, например, с орбитой МКС. К тому же, в L_4 и L_5 накапливается космический мусор, что создает для спутника опасность. Можно использовать орбиты небольшой высоты над Луной. На них влияние Земли невелико и орбита устойчива. При этом, использовать совсем низкие орбиты нельзя — гравитационный

потенциал Луны сильно неоднороден (в отличие от Земли) и низкая орбита будет быстро деградировать, вырождаясь в эллиптическую. В результате, низкий спутник быстро упадет на поверхность Луны.